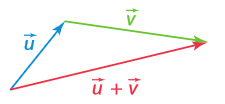
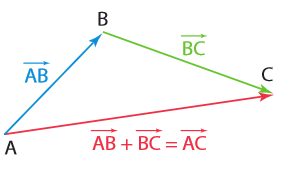
**Rappels**

|  |
| --- |
| **Définition**. Soit un vecteur du plan. On représente le vecteur par une flèche  représente la translation « se déplacer de unités vers la droite/gauche et de unités vers le haut/bas ». Visuellement, deux vecteurs sont égaux s’ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur. |

****Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, pente

Description générée automatiquement**Définition**. Pour tous et , .  
Additionner des vecteurs, c’est appliquer des translations successivement.  
**Définition**. Pour tous et ,   
 donc soustraire un vecteur, c’est additionner son opposé.  
**Définition.** Pour tout et tout réel ,   
Multiplier un vecteur par , c’est multiplier sa longueur par .  
Multiplier un vecteur par , c’est multiplier sa longueur par et inverser son sens.

|  |
| --- |
| **Définition**. Etant donnés deux points et on note . Le vecteur représente la translation qui déplace notamment le point au point |

**Propriété.** ssi est un parallélogramme. (Attention à l’ordre des lettres). **Propriétés.** Pour tous points on a . Pour tout point , on a **Propriétés.** Soit un vecteur .  
Pour tout point , on peut écrire sous la forme pour un certain point .  
Pour tout point , on peut écrire sous la forme pour un certain point .

|  |
| --- |
| **Propriété**. **Relation de Chasles.**  Soit trois points. Alors . Attention, . |

|  |
| --- |
| **Définition.** La **longueur d’un vecteur** , notée et lue « **norme de  »** est  . **Définition.** La **longueur d’un segment** est . **Définition.** Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme , autrement dit s’il est de longueur . **Remarque.** On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. est toujours de norme . |

Une image contenant Police, ligne, diagramme

Description générée automatiquement  
**Définition.** **Angle orienté**. Si et sont unitaires : Soit et les points tels que ,.  
 et sont 2 points du cercle trigonométrique puisque et sont unitaires et est de rayon .  
**L’angle orienté de et** noté est défini comme la longueur de l’arc de cercle , modulo , comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect.  
Si et sont quelconques : on se ramène au cas unitaire. est défini comme l’angle orienté .  
**Définition.** On définit de la manière analogue **un angle géométrique**, en comptant la longueur positivement quel que soit le sens, et modulo , au lieu de .

|  |
| --- |
| **Remarque.** Intuitivement, l’angle géométrique de et noté correspond à l’angle saillant (entre 0 et ) que l’on mesure directement au rapporteur entre et si on les fait partir d’un même point. est donc toujours dans l’intervalle . |

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s’ils forment un angle géométrique valant .  
**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s’ils forment un angle géométrique valant ou .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont **colinéaires** ssi il existe un réel tel que .

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **repère** désigne la donnée d’un point et de vecteurs et non colinéaires. |

**Propriété et définition**. Soit . Soit un vecteur . Il existe d’uniques tels que .  
 et sont **les coordonnées du vecteur dans le repère** . On note   
**Propriété et définition**. Soit un point . Il existe d’uniques tels que .  
 et sont **les coordonnées du point dans le repère** . On note  **Définition**. On note le **repère canonique**. Jusqu’ici, on a seulement utilisé .

|  |
| --- |
| **Remarque**. Quand on change de repère , les coordonnées d’un vecteur ou d’un point changent. Cependant, les définitions et formules précédentes restent valables, si on les écrit dans un même repère . |

**Définition**. Un **repère** est **orthogonal** si et sont orthogonaux.

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **repère** est **orthonormé** si et sont orthogonaux et de longueur dans . |

**Remarque.** Dans un repère orthonormé , l’angle géométrique vaut toujours , mais l’angle orienté peut valoir soit , soit .  
**Définition.** Un repère orthonormé est **direct** (resp. **indirect**) ssi (resp. ).

**Propriété**. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère orthonormé  
**Propriété**. Les angles orientés ne changent pas par changement de repère orthonormé direct.

|  |
| --- |
| **Définition**. Le **déterminant** de deux vecteurs et est . |

**Propriété.** Dans un repère orthonormé, l’aire du parallélogramme formé par et vaut

|  |
| --- |
| **Propriété**. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n’importe quel repère R) |

1. **Point de vue géométrique du produit scalaire**

|  |
| --- |
| **Théorème.** **Loi des cosinus**, ou **formule d’Al-Kashi** (généralisation du théorème de Pythagore) Dans un triangle quelconque, on a, par exemple . On l’écrit parfois sous la forme en notant , |

**Exemple**. Soit un triangle tel que , et . Calculer la longueur .  
 et donc

|  |
| --- |
| **Définition**. **Produit scalaire**. Soit et deux vecteurs du plan tous deux non nuls. On appelle **produit scalaire de et**  et on note le nombre réel défini par : Si et , alors le produit scalaire s’écrit : |

**Remarque.** La loi des cosinus se réécrit alors .  
Dans le cas où est nul ou est nul, on définit . (l’angle n’a pas de sens dans ce cas) **Exemple**. Soit deux vecteurs et tels que et et .  
Leur produit scalaire vaut =

|  |
| --- |
| **Propriétés**. Soit deux vecteurs non nuls. On a puisque  • et sont colinéaires de même sens  • et sont colinéaires de sens opposé  • et sont orthogonaux  Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. |

**Propriété (projeté orthogonal)**. Soit trois points (ou deux vecteurs qu’on fait partir d’un même point ). Alors où est le projeté orthogonal de sur . Le signe est si est de même sens que , et sinon.

1. **Point de vue algébrique du produit scalaire**

|  |
| --- |
| **Théorème.** Calculer un produit scalaire de vecteurs à partir de leurs coordonnées. Dans un repère orthonormé, si et , alors |

**Démonstration**. On peut choisir 3 points tels que et .  
D’une part, d’après Chasles : .  
D’autre part, d’après la loi des cosinus, et la définition géométrique du produit scalaire :  
   
Ainsi , donc :  
   
   
.  
**Exemple**. Le produit scalaire de et vaut

|  |
| --- |
| **Théorème**. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul si et seulement si . |

**Exemple**. On considère les vecteurs et . Leur produit scalaire vaut :  
 donc les deux vecteurs et ne sont pas orthogonaux.

**Théorème.** Propriétés algébriques du produit scalaire.  
Soit trois vecteurs du plan, et un réel. Alors :  
• (commutativité) • donc   
• (distributivité) •   
• • (Loi des cosinus)

|  |
| --- |
| **Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a  **Propriété**. Soit et deux points distincts. L’ensemble des points du plan tels que est le cercle de diamètre . **Propriété**. Soit , et trois points distincts.  est rectangle en si et seulement si appartient au cercle de diamètre . |

**Propriété**. Pour calculer les coordonnées d’un vecteur dans un repère orthonormé, on projette le vecteur sur les vecteurs de base. Dans un repère orthonormé ,  
Les coordonnées d’un vecteur vérifient  et .   
Les coordonnées d’un point vérifient et .

Une image contenant ligne, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété et définitions**. Soit une droite.  
Alors est un vecteur unitaire directeur de cette droite .  
Soit un point du plan. Soit le projeté orthogonal de sur la droite .  
Alors : et   
 est appelé **vecteur projeté orthogonal** du vecteur sur la droite .  
 est appelé **composante** de le long de la droite (orientée par ).